Оглавление

Приводимые задания предлагались в трех возрастных категориях (9, 10, 11 классы) по 4 равноценных по сложности варианта в каждой.

9 классы

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Степан собрал верное равенство из карточек с изображением чисел и математических знаков. Потом пришёл Миша и перемешал карточки.

$$\boxed{\mathbf{9}}\ \boxed{=}\ \boxed{^{2}}\ \boxed{\mathbf{8}}\ \boxed{\mathbf{7}}\ \boxed{-}\ \boxed{^{2}}\ \boxed{\mathbf{1}}$$

(карточка $\boxed{^{2}}$ - возведение в квадрат).

Помогите Степану восстановить исходное равенство.

2. Какое число надо убрать из набора подряд идущих натуральных чисел $1, 2, 3, \ldots, 2013$, чтобы *сумма всех остальных* чисел делилась нацело на 2014? Решение обоснуйте.

3. Определите, *во сколько раз* число $((2014)^{2^{2014}} - 1)$ больше, чем число, записанное в следующем виде:

$$((2014)^{2^0} + 1) \cdot ((2014)^{2^1} + 1) \cdot ((2014)^{2^2} + 1) \cdot \ldots \cdot ((2014)^{2^{2013}} + 1).$$

Решение обоснуйте.

4. В трапеции, площадь которой равна **1**, каждая сторона поделена на *три* равные части. Соответствующие точки соединены отрезками, как показано на рисунке (рис. 1). Найдите площадь заштрихованной фигуры, если известно, что нижнее основание трапеции в *два* раза больше верхнего.

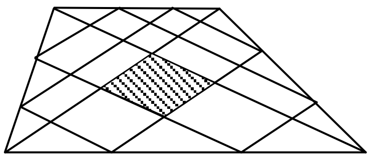


Рис. 1

5. Квадратная таблица состоит из 2014 строк и 2014 столбцов. В каждой клетке, находящейся на пересечении строки с номером i и столбца с номером j, записано число $a_{i,j} = (-1)^i (2015 - i - j)^2$. Найдите сумму *всех* чисел в таблице.

6. При возведении двузначного числа в степень 2014 последняя цифра оказалась равна **1**, а предпоследняя равна **4**. Найдите *все* такие двузначные числа.

7. Имеются два сосуда. В первом содержится **1** литр **10**-ти процентного раствора кислоты, во втором – **2** литра **60**-ти процентного. Проделали следующее действие, состоящее из двух этапов: на первом этапе из второго сосуда перелили в первый **1** литр раствора, на втором из первого перелили обратно во второй **1** литр полученной смеси. Какое *минимальное количество раз* нужно проделать такое действие, чтобы концентрация растворов в сосудах отличалась менее чем на **0,1%**?

8. Известно, что три квадрата, изображённые на листе в клетку (рис. 2), имеют размеры $n \times n$ клеток, где n – некоторое натуральное число. Докажите, что делая разрезы *только по изображённым линиям*, можно вырезать фигуру, количество клеток в которой делится нацело на **8**.

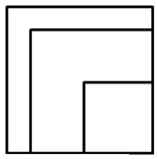


Рис. 2

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Нетрудно убедиться в том, что ответом данной задачи является выражение:

$$9^2 - 8^2 = 17.$$

Ответ: $9^2 - 8^2 = 17$.

Задача 2

Поскольку для чисел ряда $1, 2, 3, \dots, 2013$ справедливы равенства:

$$1 + 2013 = 2 + 2012 = \dots = 1006 + 1008 = 2014,$$

то среди них надо убрать число 1007, чтобы сумма оставшихся делилась на 2014.

Ответ: 1007.

Задача 3

Воспользуемся формулой разности квадратов для числа $2014^{2^{2014}} - 1$:

$$2014^{2^{2014}} - 1 = \left(2014^{2^{2013}} - 1\right)\left(2014^{2^{2013}} + 1\right) =$$

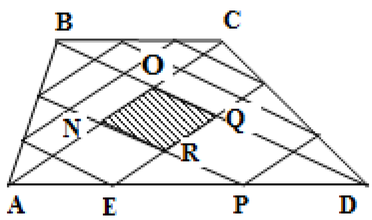
$$= \left(2014^{2^{2012}} - 1\right)\left(2014^{2^{2012}} + 1\right)\left(2014^{2^{2013}} + 1\right) = \dots =$$

$$= (2014 - 1)(2014 + 1) \cdot \dots \cdot \left(2014^{2^{2013}} + 1\right).$$

Отсюда следует, что число $2014^{2^{2014}} - 1$ больше числа $(2014 + 1) \cdot \dots \cdot \left(2014^{2^{2013}} + 1\right)$ в 2013 раз.

Ответ: 2013.

Задача 4



Обозначим через $S = S_{ONRQ} -$ площадь заштрихованной фигуры.

По свойствам площадей треугольников с общим углом имеем:

$$\frac{S_{AOD}}{S_{EQD}} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \frac{9}{4},$$

отсюда $S_{EQD} = \frac{4}{9} S_{AOD}$. И, следовательно, $S_{AOQE} = S_{PNOD} = \frac{5}{9} S_{AOD}$. В то же время треугольник ERP подобен треугольнику AOD с коэффициентом подобия $\frac{1}{3}$, значит $S_{ERP} = \frac{1}{9} S_{AOD}$. Поэтому

$$S_{AOQE} + S_{PNOD} + S_{ERP} - S = S_{AOD},$$

$$\frac{5}{9} S_{AOD} + \frac{5}{9} S_{AOD} - \frac{1}{9} S_{AOD} - S = S_{AOD},$$

и $S = \frac{2}{9} S_{AOD}$.

При этом, $S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2}(h_1 + h_2)$, где h_1 – высота треугольника BOC и h_2 – высота треугольника AOD. Ясно, что $h_1 = \frac{1}{2} h_2$ в силу подобия треугольников BOC и AOD с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Следовательно:

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2}(h_1 + h_2) = \frac{3 \cdot AD}{4} \cdot \frac{3}{2} h_2 = 1,$$

откуда $AD \cdot h_2 = \frac{8}{9}$. И в итоге:

$$S = \frac{2}{9} S_{AOD} = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot AD \cdot h_2 = \frac{8}{81}.$$

Ответ: $\frac{8}{81}$.

Задача 5

Достаточно заметить, что

$$a_{i,j} + a_{2015-i,2015-j} = (-1)^i (2015 - i - j)^2 +$$

$$+(-1)^{2015-i}\big(2015 - (2015 - i) - (2015 - j)\big)^2 =$$

$$= (-1)^i (2015 - i - j)^2 + (-1)^{2015-i} (2015 - i - j)^2 = 0,$$

поскольку i и $2015 - i$ имеют разные четности. Следовательно, сумма всех элементов в таблице равна нулю.

Ответ: 0.

Задача 6

Обозначим через $10x + y -$ искомое двузначное число ($x, y -$ цифры от 0 до 9). Очевидно, что последняя цифра y искомого числа равна 1 или 9. Рассмотрим два случая:

1. $y = 1$. Заметим, что $(10x+1)^{2014} = \underbrace{(10x+1)\cdot \ldots \cdot (10x+1)}_{2014} = A + {}$ $+2014 \cdot 10x + 1$ и при этом число A делится нацело на 100. Следовательно, предпоследняя цифра определяется слагаемым $2014 \cdot 10x$. Откуда $x = 1$ или $x = 6$.
2. $y = 9$. Заметим, что $(10x+9)^{2014} = (10(x+1)-1)^{2014} =$ $= \underbrace{(10(x+1)-1)^{2014} \cdot \ldots \cdot (10(x+1)-1)^{2014}}_{2014} = A - 2014 \cdot 10(x+1) + 1$ и при этом число A делится нацело на 100. Следовательно, предпоследняя цифра определяется слагаемым $-2014 \cdot 10(x+1)$. Откуда $x = 3$ или $x = 8$.

Суммируя полученное, приходим к ответу.

Ответ: 11, 61, 39, 89.

Задача 7

Пусть r_1 и r_2 – концентрации 1-го и 2-го растворов соответственно. После первого переливания концентрация 1-го станет $r_1' = \frac{r_1+r_2}{2}$, а после второго переливания концентрация 2-го станет $r_2' = \frac{\frac{r_1+r_2}{2}+r_2}{2} = \frac{r_1+3r_2}{4}$. Тогда $r_2' - r_1' = \frac{r_2-r_1}{4}$. Следовательно, через n действий разность концентраций станет равна $\frac{r_2-r_1}{4^n} = \frac{0{,}6-0{,}1}{4^n} = \frac{1}{2\cdot 4^n}$. Отсюда наименьшим решением неравенства $\frac{1}{2\cdot 4^n} < \frac{1}{1000}$ является $n = 5$.

Ответ: 5.

Задача 8

Площадь квадратов равна n^2. Посмотрим, какие остатки могут давать квадраты целых чисел при делении на 8:

$$0^2 = 0$$

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 4$$

$$3^2 = 1$$

$$4^2 = 0$$

$$5^2 = 1$$

$$6^2 = 4$$

$$7^2 = 1$$

Таким образом, площади наших квадратов могут при делении на 8 давать остатки 0, 1 и 4. Если площадь одного из квадратов дает остаток 0, то вырежем его – это искомая фигура. Если такового нет, то есть два квадрата, площади которых дают одинаковые остатки. Тогда, вырезав из большего квадрата меньший, получим фигуру буквой «Г», площадь которой кратна 8.

10 классы

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Определите, *во сколько раз* число $((2014)^{2^{2014}}-1)$ больше, чем число, записанное в следующем виде: $((2014)^{2^0}+1)\cdot((2014)^{2^1}+1)\cdot((2014)^{2^2}+1)\cdot\ldots\cdot((2014)^{2^{2013}}+1)$. Решение обоснуйте.

2. Докажите равенство

$$tg\left(\frac{3\pi}{32}\right)+tg\left(\frac{5\pi}{32}\right)+tg\left(\frac{11\pi}{32}\right)+tg\left(\frac{13\pi}{32}\right)=\frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{16}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{5\pi}{16}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{11\pi}{16}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{13\pi}{16}\right)}.$$

3. В трапеции, площадь которой равна **1,** каждая сторона поделена на *три* равные части. Соответствующие точки соединены отрезками, как показано на рисунке (рис. 1). Найдите площадь заштрихованной фигуры, если известно, что нижнее основание трапеции в *два* раза больше верхнего.

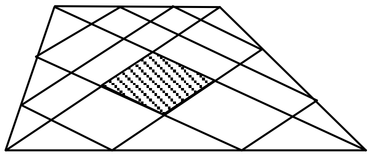


Рис. 2

4. При возведении двузначного числа в степень 2014 последняя цифра оказалась равна **1**, а предпоследняя равна **4**. Найдите *все* такие двузначные числа.

5. Квадратная таблица состоит из 2014 строк и 2014 столбцов. В каждой клетке, находящейся на пересечении строки с номером i и столбца с номером j, записано число $a_{i,j}=(-1)^i(2015-i-j)^2$. Найдите сумму *всех* чисел в таблице.

6. Имеются два сосуда. В первом содержится **1** литр **10**-ти процентного раствора кислоты, во втором – **2** литра **60**-ти процентного. Проделали следующее действие, состоящее из двух этапов: на первом этапе из второго сосуда перелили в первый **1** литр раствора, на втором из первого перелили обратно во второй **1** литр полученной смеси. Какое

минимальное количество раз нужно проделать такое действие, чтобы концентрация растворов в сосудах отличалась менее чем на **0,1%**?

7. На плоскости изображён квадрат со стороной, равной 2014 клеткам. *Диагональ* одной клетки равна **1** см. Внутри квадрата расположен еще один квадрат *ABCD*, вершинами которого являются середины сторон исходного квадрата (рис. 2). Из точки *X* одновременно начинают двигаться две точки. Первая точка двигается со скоростью $v_1 = 10\,см/сек$ по часовой стрелке по сторонам квадрата *ABCD*. Вторая точка начинает двигаться до точки *N* и далее курсирует по диагонали *MN* исходного квадрата со скоростью $v_2 = 13\,см/сек$. Через какое *минимальное* время они встретятся в точке *Y*?

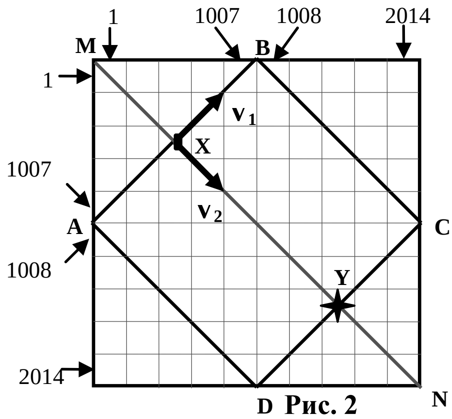


Рис. 2

8. Известно, что три квадрата с общим прямым углом, изображённые на листе в клетку (рис. 3), имеют размеры $n \times n$ клеток, где n – некоторое натуральное число. Докажите, что делая разрезы *только по изображённым линиям*, можно вырезать фигуру, количество клеток в которой делится нацело на **8**.

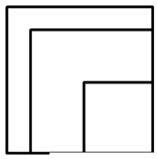


Рис. 3

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Воспользуемся формулой разности квадратов для числа $2014^{2^{2014}}-1$:

$$2014^{2^{2014}}-1=\left(2014^{2^{2013}}-1\right)\left(2014^{2^{2013}}+1\right)=$$

$$=\left(2014^{2^{2012}}-1\right)\left(2014^{2^{2012}}+1\right)\left(2014^{2^{2013}}+1\right)=\cdots=$$

$$=(2014-1)(2014+1)\cdot\ldots\cdot\left(2014^{2^{2013}}+1\right).$$

Отсюда следует, что число $2014^{2^{2014}}-1$ больше числа $(2014+1)\cdot\ldots\cdot\left(2014^{2^{2013}}+1\right)$ в 2013 раз.

Ответ: 2013.

Задача 2

Сгруппируем слагаемые в левой и правой частях доказываемого равенства:

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{32}+\operatorname{tg}\frac{13\pi}{32}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{3\pi}{32}\cdot\cos\frac{13\pi}{32}}=\frac{1}{\cos\frac{3\pi}{32}\cdot\sin\frac{3\pi}{32}}=\frac{2}{\sin\frac{3\pi}{16}}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{32}+\operatorname{tg}\frac{11\pi}{32}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{5\pi}{32}\cdot\cos\frac{11\pi}{32}}=\frac{1}{\cos\frac{11\pi}{32}\cdot\sin\frac{11\pi}{32}}=\frac{2}{\sin\frac{11\pi}{16}}.$$

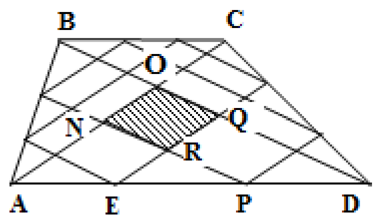
$$\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{16}}+\frac{1}{\sin\frac{13\pi}{16}}=\frac{2\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{5\pi}{16}}{\sin\frac{3\pi}{16}\cdot\sin\frac{13\pi}{16}}=\frac{2\cos\frac{5\pi}{16}}{\sin\frac{3\pi}{16}\cdot\cos\frac{5\pi}{16}}=\frac{2}{\sin\frac{3\pi}{16}}.$$

$$\frac{1}{\sin\frac{5\pi}{16}}+\frac{1}{\sin\frac{11\pi}{16}}=\frac{2\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{3\pi}{16}}{\sin\frac{5\pi}{16}\cdot\sin\frac{11\pi}{16}}=\frac{2\cos\frac{3\pi}{16}}{\sin\frac{11\pi}{16}\cdot\cos\frac{3\pi}{16}}=\frac{2}{\sin\frac{11\pi}{16}}.$$

Теперь нетрудно понять, что доказываемое равенство справедливо.

Задача 3

Обозначим через $S=S_{ONRQ}-$ площадь заштрихованной фигуры.



По свойствам площадей треугольников с общим углом имеем:

$$\frac{S_{AOD}}{S_{EQD}} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \frac{9}{4},$$

отсюда $S_{EQD} = \frac{4}{9} S_{AOD}$. И, следовательно, $S_{AOQE} = S_{PNOD} = \frac{5}{9} S_{AOD}$. В то же время треугольник ERP подобен треугольнику AOD с коэффициентом подобия $\frac{1}{3}$, значит $S_{ERP} = \frac{1}{9} S_{AOD}$. Поэтому

$$S_{AOQE} + S_{PNOD} + S_{ERP} - S = S_{AOD},$$

$$\frac{5}{9} S_{AOD} + \frac{5}{9} S_{AOD} - \frac{1}{9} S_{AOD} - S = S_{AOD},$$

и $S = \frac{2}{9} S_{AOD}$.

При этом, $S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2}(h_1 + h_2)$, где h_1 – высота треугольника BOC и h_2 – высота треугольника AOD. Ясно, что $h_1 = \frac{1}{2} h_2$ в силу подобия треугольников BOC и AOD с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Следовательно:

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2}(h_1 + h_2) = \frac{3 \cdot AD}{4} \cdot \frac{3}{2} h_2 = 1,$$

откуда $AD \cdot h_2 = \frac{8}{9}$. И в итоге:

$$S = \frac{2}{9} S_{AOD} = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot AD \cdot h_2 = \frac{8}{81}.$$

Ответ: $\frac{8}{81}$.

Задача 4

Обозначим через $10x + y$ – искомое двузначное число (x, y – цифры от 0 до 9). Очевидно, что последняя цифра y искомого числа равна 1 или 9. Рассмотрим два случая:

1. $y = 1$. Заметим, что $(10x+1)^{2014} = \underbrace{(10x+1) \cdot \ldots \cdot (10x+1)}_{2014} = A +$ $+2014 \cdot 10x + 1$ и при этом число A делится нацело на 100. Следовательно, предпоследняя цифра определяется слагаемым $2014 \cdot 10x$. Откуда $x = 1$ или $x = 6$.

2. $y = 9$. Заметим, что $(10x+9)^{2014} = (10(x+1)-1)^{2014} = $
$= \underbrace{(10(x+1)-1)^{2014} \cdot \ldots \cdot (10(x+1)-1)^{2014}}_{2014} = A - 2014 \cdot 10(x+1) + 1$ и при этом число A делится нацело на 100. Следовательно, предпоследняя цифра определяется слагаемым $-2014 \cdot 10(x+1)$. Откуда $x = 3$ или $x = 8$.

Суммируя полученное, приходим к ответу.

Ответ: 11, 61, 39, 89.

Задача 5

Достаточно заметить, что

$$a_{i,j} + a_{2015-i,2015-j} = (-1)^i(2015-i-j)^2 +$$
$$+(-1)^{2015-i}\left(2015-(2015-i)-(2015-j)\right)^2 =$$
$$= (-1)^i(2015-i-j)^2 + (-1)^{2015-i}(2015-i-j)^2 = 0,$$

поскольку i и $2015-i$ имеют разные четности. Следовательно, сумма всех элементов в таблице равна нулю.

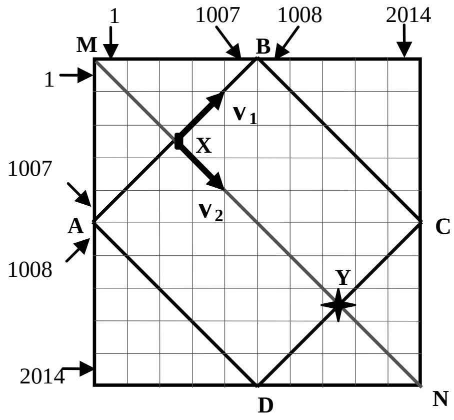
Ответ: 0.

Задача 6

Пусть r_1 и r_2 – концентрации 1-го и 2-го растворов соответственно. После первого переливания концентрация 1-го станет $r_1' = \frac{r_1+r_2}{2}$, а после второго переливания концентрация 2-го станет $r_2' = \frac{\frac{r_1+r_2}{2}+r_2}{2} = \frac{r_1+3r_2}{4}$. Тогда $r_2' - r_1' = \frac{r_2-r_1}{4}$. Следовательно, через n действий разность концентраций станет равна $\frac{r_2-r_1}{4^n} = \frac{0,6-0,1}{4^n} = \frac{1}{2\cdot 4^n}$. Отсюда наименьшим решением неравенства $\frac{1}{2\cdot 4^n} < \frac{1}{1000}$ является $n = 5$.

Ответ: 5.

Задача 7



Диагональ квадрата занимает 2014 клеток и равна соответственно 2014 см. Из прямоугольного треугольника с известными катетами находим отрезок $AD = XY = 1007$ см. В силу симметрии получаем, что $MX = YN = \frac{1007}{2}$ см. Следовательно, $AX = XB = CY = YD = \frac{1007}{2}$.

Первая точка будет оказываться в точке Y в следующие моменты времени:

$$\frac{\frac{1007}{2} + 1007 + \frac{1007}{2} + 4028 \cdot k}{10} = \frac{2014 + 4028 \cdot k}{10}, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Вторая точка будет оказываться в точке Y в следующие моменты времени:

$$\frac{1007 + \left(\frac{1007}{2} + 2014 + \frac{3}{2} \cdot 1007\right) \cdot n}{13} = \frac{1007 + 4028 \cdot n}{13}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

$$\frac{1007 + 1007 + 4028 \cdot n}{13} = \frac{2014 + 4028 \cdot n}{13}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

В первом случае, приравнивая времена и упрощая полученное выражение, получим:

$$\frac{2014 + 4028 \cdot k}{10} = \frac{1007 + 4028 \cdot n}{13},$$

$$4 = 10n - 13k.$$

Уравнение имеет решение $n = 3,\ k = 2$.

Во втором случае аналогичным образом получим:

$$\frac{2014 + 4028 \cdot k}{10} = \frac{2014 + 4028 \cdot n}{13},$$

$$3 = 2(13k - 10n).$$

Данное уравнение не имеет решений, т.к. 3 – нечетно.

Очевидно, что для найденной пары $(n, k) = (3,2)$ время встречи и будет минимально. Теперь находим время $t = \frac{2014+4028\cdot 2}{10} = 1007.$

Ответ: 1007 с.

Задача 8

Площадь квадратов равна n^2. Посмотрим, какие остатки могут давать квадраты целых чисел при делении на 8:

$$0^2 = 0$$

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 4$$

$$3^2 = 1$$

$$4^2 = 0$$

$$5^2 = 1$$

$$6^2 = 4$$

$$7^2 = 1$$

Таким образом, площади наших квадратов могут при делении на 8 давать остатки 0, 1 и 4. Если площадь одного из квадратов дает остаток 0, то вырежем его – это искомая фигура. Если такового нет, то есть два квадрата, площади которых дают одинаковые остатки. Тогда, вырезав из большего квадрата меньший, получим фигуру буквой «Г», площадь которой кратна 8.

11 классы

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Какое число надо убрать из набора подряд идущих натуральных чисел $1, 2, 3, \ldots, 2013$, чтобы *сумма всех остальных* чисел делилась нацело на 2014? Решение обоснуйте.

2. Докажите равенство

$$tg\left(\frac{\pi}{64}\right)+tg\left(\frac{3\pi}{64}\right)+tg\left(\frac{5\pi}{64}\right)+\cdots+tg\left(\frac{31\pi}{64}\right)=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{32}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{32}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{5\pi}{32}\right)}+\cdots+\frac{1}{\sin\left(\frac{31\pi}{32}\right)}.$$

3. $ABCDEF$ – правильный шестиугольник, имеющий зеркальную внутреннюю поверхность. Из точки A выходит луч света и после двух отражений от сторон шестиугольника (в точках M и N), попадает в точку D (рис. 1). Найдите тангенс угла EAM.

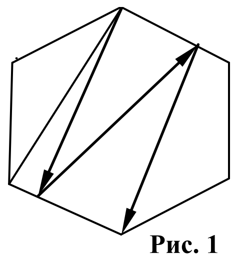


Рис. 1

4. При возведении двузначного числа в степень 2014 последняя цифра оказалась равна **1**, а предпоследняя равна **4**. Найдите *все* такие двузначные числа.

5. Квадратная таблица состоит из 2014 строк и 2014 столбцов. В каждой клетке, находящейся на пересечении строки с номером i и столбца с номером j, записано число $a_{i,j}=\log_2\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{3}(i-j)+\frac{\pi}{2}\right)\right)$. Найдите *сумму всех* чисел в таблице.

6. На плоскости изображён квадрат со стороной, равной 2014 клеткам.

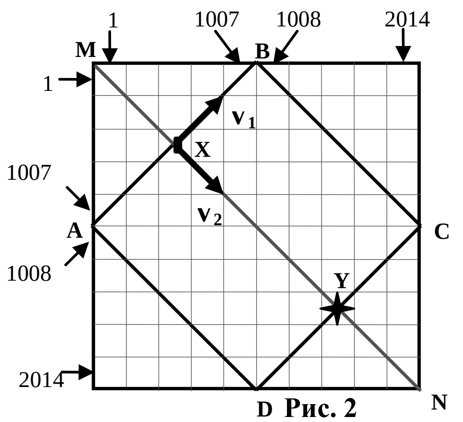


Рис. 2

Диагональ одной клетки равна **1** см. Внутри квадрата расположен еще один квадрат *ABCD*, вершинами которого являются середины сторон исходного квадрата (рис. 2). Из точки *X* одновременно начинают двигаться две точки. Первая точка двигается со скоростью $v_1 = 10\,см/сек$ по часовой стрелке по сторонам квадрата *ABCD*. Вторая точка начинает двигаться до точки *N* и далее курсирует по диагонали *MN* исходного квадрата со скоростью $v_2 = 13\,см/сек$. Через какое *минимальное* время они встретятся в точке *Y*?

7. Известно, что четыре прямоугольника с общим прямым углом, изображенные на листе в клетку (рис. 3), имеют размеры $n \times (n+2)$ клеток, где n – некоторое натуральное число. Докажите, что делая разрезы *только по изображённым линиям*, можно вырезать фигуру, количество клеток в которой делится нацело на **12**.

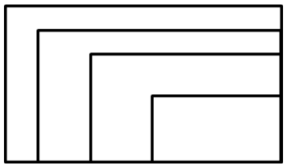


Рис. 3

8. Несколько самосвалов, стоя в очереди, загружаются поочередно в пункте А (время загрузки одно и то же для всех машин) и отвозят груз в пункт В, там они мгновенно разгружаются и возвращаются в А. Скорости машин одинаковы, скорость гружёной машины составляет **6/7** скорости порожней. Первым выехал из А водитель Петров. На обратном пути он встретил водителя Иванова, выехавшего из А последним, и прибыл в А через **6** минут после встречи. Здесь Петров сразу же приступил к загрузке, а по окончании ее выехал в пункт В и встретил Иванова второй раз через **40** минут после первой встречи. От места второй встречи до А Иванов ехал не менее **16** минут, но не более **19** минут. Определите время загрузки и количество загружавшихся самосвалов.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Сгруппируем слагаемые суммы:

$$1+2+\ \ldots+2012+2013\ =(1+2013)+(2+2012)+\ \ldots+(1006+1008)+\ 1007=$$
$$=\ 2014+\ \ldots\ +\ 2014\ +\ 1007.$$

Следовательно, убрать нужно число **1007.**

Ответ: 1007.

Задача 2

Сгруппировать слагаемые в левой и правой частях: первое и последнее, второе и предпоследнее и т. д.

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{64}+\operatorname{tg}\frac{31\pi}{64}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{64}\cdot\cos\frac{31\pi}{64}}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{64}\cdot\sin\frac{\pi}{64}}=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{32}}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{64}+\operatorname{tg}\frac{29\pi}{64}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{3\pi}{64}\cdot\cos\frac{29\pi}{64}}=\frac{1}{\cos\frac{3\pi}{64}\cdot\sin\frac{3\pi}{64}}=\frac{2}{\sin\frac{3\pi}{32}}.$$

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{32}}+\frac{1}{\sin\frac{31\pi}{32}}=\frac{2\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{15\pi}{32}}{\sin\frac{\pi}{32}\cdot\sin\frac{31\pi}{32}}=\frac{2\cos\frac{15\pi}{32}}{\sin\frac{\pi}{32}\cdot\cos\frac{15\pi}{32}}=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{32}}.$$

$$\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{32}}+\frac{1}{\sin\frac{29\pi}{32}}=\frac{2\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{13\pi}{32}}{\sin\frac{3\pi}{32}\cdot\sin\frac{29\pi}{32}}=\frac{2\cos\frac{13\pi}{32}}{\sin\frac{3\pi}{32}\cdot\cos\frac{13\pi}{32}}=\frac{2}{\sin\frac{3\pi}{32}}.$$

Теперь нетрудно понять, что доказываемое равенство справедливо.

Задача 3

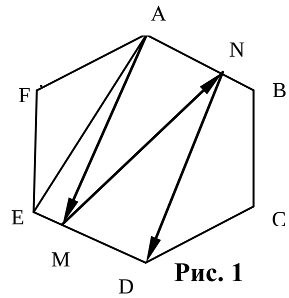


Рис. 1

По формуле $\frac{n-2}{n}180=\frac{4}{6}180=120,$ где $n-$ количество сторон правильного многоугольника, получим величину внутренних углов шестиугольника. Треугольник AFE – равнобедренный с углом при вершине 120 градусов. Отсюда получим, что $AE=\sqrt{3}ED$

Так как угол падения равен углу отражения, то треугольники AMN и MND равны и AM=MN. Следовательно, AN=MD=2EM, и тогда $tgEAM=\frac{EM}{EA}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Задача 4

Обозначим $a=10x+y$ - искомое двузначное число (x,y - цифры от 0 до 9). Так как последняя цифра числа a^{2014} равна 1, то последняя цифра y искомого числа a может принимать значения 1 или 9. Рассмотрим два случая:

1) $y=1$. Заметим, что $(10x+9)^{2014}=A+2014*10x+1$ и при этом число A делится нацело на 100. Следовательно, предпоследняя цифра определяется слагаемым $2014\cdot 10x$. Откуда $x=1$ или $x=6$.
2) $y=9$. Заметим, что $(10x+9)^{2014}=(10(x+1)-1)^{2014}=A-2014\cdot 10(x+1)+1$ и при этом число A делится нацело на 100. Следовательно, предпоследняя цифра определяется слагаемым $-2014\cdot 10(x+1)$. Откуда $x=3$ или $x=8$.

Ответ: 11, 61, 39, 89.

Задача 5

Преобразуем $\log_2\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{3}(i-j)+\frac{\pi}{2}\right)\right)=\log_2\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{3}(i-j)\right)\right)$.

Тогда для ячеек на диагонали $i=j$ и в них стоит $\log_2 1=0$.

Для $i\neq j$ найдем сумму элементов в симметричных относительно диагонали ячейках:

$$\log_2\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{3}(i-j)\right)\right)+\log_2\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{3}(j-i)\right)\right)=$$

$$=\log_2\left(\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{3}(i-j)\right)\right)\left(1-\sin\left(\frac{\pi}{3}(i-j)\right)\right)\right)=$$

$$=\log_2\left(1-\sin^2\left(\frac{\pi}{3}(i-j)\right)\right)=\log_2\left(\frac{1+\cos\left(\frac{2\pi}{3}(i-j)\right)}{2}\right).$$

Для $(i-j)=3k$, то есть 3,6,9,12…2013 данная сумма равна нулю.

Для $(i-j)=3k+1$ то есть 1,4,7,10…2011 данная сумма $\log_2\frac{1}{4}=-2$.

Общее число таких пар ячеек 2013+2010+2007+…+3 $=\frac{2016\cdot 671}{2}=676368$.

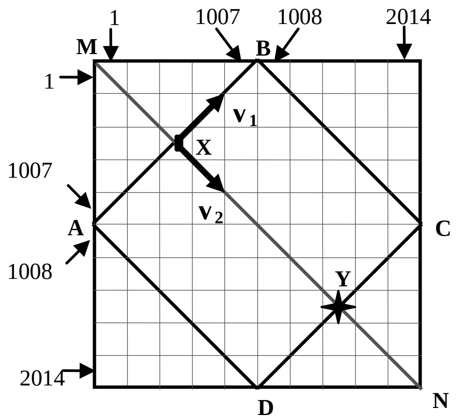
Для $(i-j)=3k+2$ то есть 2,5,8,11…2012 данная сумма $\log_2\frac{1}{4}=-2$.

Общее число таких пар ячеек 2012+2009+2006+…+2 $=\frac{2014\cdot 671}{2}=675697$.

Сумма всех чисел в таблице равна $(676368+675697)\cdot(-2)=-2704130$.

Ответ: -2704130

Задача 6



Диагональ квадрата занимает 2014 клеток и равна соответственно 2014 см. Из прямоугольного треугольника с известными катетами находим отрезок $AD = XY = 1007$ см. В силу симметрии получаем, что $MX = YN = \frac{1007}{2}$ см. Следовательно, $AX = XB = CY = YD = \frac{1007}{2}$.

Первая точка будет оказываться в точке Y в следующие моменты времени:

$$\frac{\frac{1007}{2} + 1007 + \frac{1007}{2} + 4028 \cdot k}{10} = \frac{2014 + 4028 \cdot k}{10}, \qquad k = 0,1,2,\dots$$

Вторая точка будет оказываться в точке Y в следующие моменты времени:

$$\frac{1007 + \left(\frac{1007}{2} + 2014 + \frac{3}{2} \cdot 1007\right) \cdot n}{13} = \frac{1007 + 4028 \cdot n}{13}, \qquad n = 0,1,2,\dots$$

$$\frac{1007 + 1007 + 4028 \cdot n}{13} = \frac{2014 + 4028 \cdot n}{13}, \qquad n = 0,1,2,\dots$$

В первом случае, приравнивая времена и упрощая полученное выражение, получим:

$$\frac{2014 + 4028 \cdot k}{10} = \frac{1007 + 4028 \cdot n}{13},$$

$$4 = 10n - 13k.$$

Уравнение имеет решение $n = 3,\ k = 2$.

Во втором случае аналогичным образом получим:

$$\frac{2014 + 4028 \cdot k}{10} = \frac{2014 + 4028 \cdot n}{13},$$

$$3 = 2(13k - 10n).$$

Данное уравнение не имеет решений, т.к. 3 – нечетно.

Очевидно, что для найденной пары $(n, k) = (3,2)$ время встречи и будет минимально. Теперь находим время $t = \frac{2014+4028\cdot 2}{10} = 1007.$

Ответ: 1007 с.

Задача 7

Площадь прямоугольников размера $n \times (n+2)$ вида равна $n^2 + 2n = (n+1)^2 - 1$. Посмотрим, какие остатки могут давать квадраты целых чисел при делении на 12.

$$0^2 = 0$$
$$1^2 = 1$$
$$2^2 = 4$$
$$3^2 = 9$$
$$4^2 = 4$$
$$5^2 = 1$$
$$6^2 = 0$$
$$7^2 = 1$$
$$8^2 = 4$$
$$9^2 = 9$$
$$10^2 = 4$$
$$11^2 = 1$$

Таким образом, площади наших прямоугольников могут при делении на 12 давать остатки 0, 3, 8 и 11. Если площадь одного из прямоугольников дает остаток 0, то вырежем его. Если такового нет, то есть два прямоугольника, площади которых дает одинаковые остатки. Тогда вырежем фигуру букой Г, вырезав из большего такого прямоугольника меньший. Очевидно, что его площадь кратна 12.

Обозначим:

- x - время загрузки одного самосвала;
- k - количество загружавшихся самосвалов;

- S – расстояние между А и В;
- v – скорость порожнего самосвала
- t – время первой встречи Петрова и Иванова после выезда Петрова из пункта А;
- T - время второй встречи Петрова и Иванова после выезда Петрова из пункта А.

Из условий задачи следует, что скорость движения груженой машины равна bv, и тогда верны следующие равенства и неравенства:

- На дорогу из А в А через В Петров потратил $\frac{S}{bv}+\frac{S}{v}$ минут. Прибытие в А Петрова произошло через a минут после первой встречи. Следовательно,
$$\frac{S}{bv}+\frac{S}{v}=t+a$$
- Между двумя встречами прошло $T-t=c$ минут.
- Иванов начал движение из А через $(k-1)x$ минут после Петрова, и, следовательно, до места первой встречи он проехал расстояние $(t-(k-1)x)bv$.
- После второго выезда из А прошло $T-t-a-x=c-a-x$ минут, и Петров успел проехать до места второй встречи расстояние $(c-a-x)bv$. Иванов двигался к А со скоростью v, следовательно,
$$\frac{(c-a-x)bv}{v}=(c-a-x)b\in[d;e].$$
- От места первой встречи до В Иванов на груженом самосвале проехал расстояние $S-(t-(k-1)x)bv$, а от В до места второй встречи на порожнем – расстояние $S-(c-a-x)bv$. Следовательно, $\frac{S-(t-(k-1)x)bv}{bv}+\frac{S-(c-a-x)bv}{v}=c$. Упрощая данное равенство, получаем, что
$$(k-1)x-(c-a-x)b=c-a.$$

Следовательно, мы получаем, что $(k-1)x-(c-a-x)b=c-a$, и при этом $(c-a-x)b\in[d;e]$. Путем несложных преобразований получаем, что верна система
$$\begin{cases}(k-1)x\in[c-a+d,c-a+e],\\ x\in\left[c-a-\frac{e}{b};c-a-\frac{d}{b}\right],\\ (k-1)x-(c-a-x)b=c-a.\end{cases}$$

В условиях первого варианта (*a=6, b=6/7, c=40, d=16, e=19*) система приобретает вид

$$\begin{cases}(k-1)x\in[50,53],\\ x\in[71/6;92/6],\\ (k-1)x-(34-x)\dfrac{6}{7}=34.\end{cases}$$

Перебором находим, что при x из промежутка $[71/6;92/6]$ выражение $(k-1)x$ может находиться в промежутке от 50 до 53 только при ***k*=*5***. Решая оставшееся уравнение, находим, что ***x=13***.

Ответ: время загрузки - 13 , количество загружавшихся самосвалов - 5.